Cálculo I 2022 – 2023 S1

Arber Selimi **Helena Almeida** **Marco Mendes**
Áurea Quintino **João Farinha** **Sofia Rézio**
Diogo Pereira **Jessica Lomba**

Teste Intermédio

- **Data:** 12 de Novembro de 2022
- **Duração:** 2 horas
- **Instruções: 1:** O teste é constituído por **quatro perguntas**. **2:** Neste enunciado, escreva o seu número e **absolutamente mais nada**, e **entregue-o no fim**. **3:** Responda ao teste no caderno de resposta, utilizando a **frente** e o **verso** de cada folha, **indicando** a pergunta a que está a responder, **nunca** respondendo a **mais do que uma pergunta na mesma folha**, e **não desagrafando** nenhuma folha. **4:** Se quiser utilizar alguma folha do caderno de resposta como espaço para **rascunhos**, indique-o no **espaço dedicado ao número da pergunta**. **5: Apresente todos os cálculos que efetuar e justifique convenientemente** todas as suas respostas. **6: Não** é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem máquinas de calcular. **7:** Não é permitido abandonar a sala antes de decorrida a primeira hora de prova. **8:** Os **telefones** deverão permanecer **desligados** ao longo de toda a prova. **9: Quando o tempo acabar** e lhe for solicitado, **fotografe as suas respostas e entregue o caderno de resposta**.

  Bom trabalho!

Nº:

1. **(6 val)** Sejam $A = [-2,2[\cap \mathbb{Q}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

a. **(1.5 val)** Descreva o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes do conjunto $A \cap B$, e indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do mesmo.

b. **(0.5 val)** A condição "$x \in A$" é necessária, suficiente, ou necessária e suficiente para "$x \in B$"?

Considere agora a função $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-y}$.

c. **(1 val)** Descreva e represente geometricamente D.

d. **(0.75 val)** Descreva o interior e a fronteira de D.

e. **(0.5 val)** Descreva o derivado de D, expressando-o na forma de um produto cartesiano.

f. **(0.75 val)** D é aberto? É fechado? É compacto?

~~**g.**~~ **(1 val)** Será D conexo? E convexo?

2. **(7 val)** Considere as funções $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon D_g \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h\colon \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}$ e $j\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

- $f(x,y,z) = \left(\sqrt{y-1}, \ln(z^2), e^x + \pi\right)$
- $g(a,b,c) = \left(\frac{1}{c-2\pi}, a^2 + e^b\right)$
- $h(u,v) = \ln(2 + u^2 + v^2)$
- $j(p,q) = \left((p+q)^3, \log_3(p)\right)$

a. **(1.5 val)** Descreva o domínio e o contradomínio de f, sob a forma de produtos cartesianos de conjuntos.

b. **(2 val)** Caracterize, caso estejam definidas, as funções $(g \circ f)$ e $(f \circ g)$.

c. **(0.5 val)** Descreva o contradomínio de h.

d. **(1 val)** Descreva a curva de nível k de h, para $k \in CD_h$, e represente graficamente a curva de nível $\ln(6)$.

e. **(2 val)** Mostre que j é invertível e caracterize a sua inversa.

3. **(5 val)** Considere as sucessões $(a_n), (b_n)$ e (c_n), de termos gerais:

- $a_n = \dfrac{2n+4}{n}$
- $b_n = 2 + \dfrac{k}{n}, k \in \mathbb{R}$
- $c_n = a_n - 2$

Sejam A e B os conjuntos dos termos das sucessões (a_n) e (b_n), respetivamente.

a. **(1.5 val)** Calcule $\lim\, (n.a_n)^{-c_n}$.

b. **(1.25 val)** Calcule $\lim\left(-\frac{1}{c_n}\right)$ e prove, com recurso à definição de limite, que se trata de uma sucessão divergente para mais infinito em módulo.

c. **(0.75 val)** Sabendo que $A' \cap B' = \emptyset$, indique o valor de k.

d. **(1.5 val)** Considere a série numérica $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^n$, com $x \in \mathbb{R}$. Indique os valores de x para os quais a série é convergente, e, para esses valores, calcule a soma da série, em função de x.

4. **(2 val)** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

a. **(1 val)** Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1\}$, então C é vizinhança de $(a,b,0)$ em $\mathbb{R}^3$.

b. **(1 val)** Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões tais que

- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < v_{n+1}$
- $\exists k \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, v_n < k,$

então $\lim u_n = \lim(v_{2n+3} - v_n)$.

Cálculo I 2022 – 2023 S1
Arber Selimi **Helena Almeida** **Marco Mendes**
Áurea Quintino **João Farinha** **Sofia Rézio**
Diogo Pereira **Jessica Lomba**

Tópicos de Resolução

1.

a.

- Conjunto dos majorantes de $(A \cap B)$: $[1, +\infty[$
- Conjunto dos minorantes de $(A \cap B)$: $]-\infty, -2]$
- Sup $(A \cap B) = 1$, inf $(A \cap B) = -2$, min $(A \cap B) = -2$, max $(A \cap B) = 1$

b.

- Dizer que dado que $x \in B \Rightarrow x \in A$, $x \in A$ é condição necessária para $x \in B$.

c.

- Descrever o conjunto D, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2 \wedge y \neq x\}$.
- Representar geometricamente D como a região delimitada pela recta vertical de equação $x = -2$ e pela recta vertical de equação $x = -2$, excluindo os pontos que se encontram sobre a recta de equação $y = x$.

d.

- Escrever o interior como $int(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2 \wedge y \neq x\}$, ou equivalente.
- Escrever a fronteira como $fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2 \vee (|x| \leq 2 \wedge y = x)\}$, ou equivalente.

e.

- Escrever o derivado como $D' = [-2,2] \times \mathbb{R}$

f.

- Explicar que dado que $D \neq int(D)$, D não é aberto.
- Explicar que dado que $D \neq \overline{D}$, D não é aberto.
- Explicar que um conjunto compacto é um conjunto limitado e fechado, e dado que D não é nem uma coisa nem outra, D não é compacto.

g.

- Mostrar que D não é conexo: por exemplo, seja $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2 \wedge y > x\}$ e seja $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2 \wedge y < x\}$. Então, $(D = D_1 \cup D_2) \wedge (\overline{D_1} \cap D_2 = \emptyset) \wedge (D_1 \cap \overline{D_2} = \emptyset)$, pelo que D é desconexo.
- Indicar que D não é convexo dado que não é conexo, ou justificar que D não é convexo dado que, por exemplo, o segmento de recta que une os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$ não está totalmente contido em D (o ponto $(0,0)$ não pertence a D).

2.

a.

- $D_f = \mathbb{R} \times [1, +\infty[\times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $CD_f = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times]\pi, +\infty[$

b.

- Constatar que as dimensões do conjunto de chegada de f e do domínio de g são compatíveis, pelo que a composição $g \circ f$ poderá estar definida.
- Descrever o domínio de $g \circ f$:
  - $D_{g\circ f} = \{(x, y, z) \in D_f : f(x, y, z) \in D_g\}$
  - $D_g = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c - 2\pi \neq 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{2\pi\})$
  - $f(x, y, z) \in D_g \iff e^x + \pi \neq 2\pi \iff x \neq \ln(\pi)$
  - Concluir que $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{\ln(\pi)\} \times [1, +\infty[\times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$
- Obter a expressão analítica da função composta:

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\big(f(x, y, z)\big) = g\big(\sqrt{y-1}, \ln(z^2), e^x + \pi\big) = \left(\frac{1}{e^x - \pi}, \mathrm{y} - 1 + z^2\right)$$

- Caracterizar a função composta:

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{\ln(\pi)\} \times [1, +\infty[\times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2\,, (x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{e^x - \pi}, \mathrm{y} - 1 + z^2\right)$$

- Constatar que as dimensões do conjunto de chegada de g e do domínio de f não são compatíveis, pelo que a composição $f \circ g$ não está definida.

c.

- $D_{(u,v)} = \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}_0^- \Rightarrow CD_{u^2+v^2} = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow CD_{2+u^2+v^2} = [2, +\infty[\Rightarrow CD_{\ln(2+u^2+v^2)} = [\ln(2), +\infty[$
- Concluir que $CD_h = [\ln(2), +\infty[$.

d.

- Dado $k \in CD_h = [\ln(2), +\infty[$,

$$C_h^k = \{(u, v) \in D_h : h(u, v) = k\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}_0^- : u^2 + v^2 = e^k - 2\}.$$

- Representar graficamente a curva de nível $\ln(6)$,

$$C_h^{\ln(6)} = \{(u, v) \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}_0^- : u^2 + v^2 = 4\}.$$

e.

- Mostrar que, dado $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$j(p,q) = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases}(p+q)^3 = \alpha \\ \log_3(p) = \beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p+q = \sqrt[3]{\alpha} \\ p = 3^\beta\end{cases} \Leftrightarrow (p,q) = \left(3^\beta, \sqrt[3]{\alpha} - 3^\beta\right)$$

- Concluir a sobrejetividade de j, em virtude da existência de solução de $j(p,q) = (\alpha,\beta)$ para qualquer $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

- Concluir a injetividade de j, em virtude da unicidade de solução de $j(p,q) = (\alpha,\beta)$, dado $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

- Concluir que j é bijetiva e, assim, invertível.

- Caracterizar a função inversa de j:

$$j^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\,, (\alpha,\beta) \mapsto \left(3^\beta, \sqrt[3]{\alpha} - 3^\beta\right).$$

3.

a.

- Escrever $\lim\, (n.a_n)^{-c_n} = \lim(2n+4)^{-\frac{4}{n}} = \lim\left[(2n+4)^{-\frac{1}{n}}\right]^4 = \left[\frac{1}{\lim \sqrt[n]{2n+4}}\right]^4$.
- Definir $u_n = 2n+4$ e referir que $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Usar o resultado $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \Rightarrow \lim \sqrt[n]{u_n} = a$.
- Mostrar que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, logo $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$.

b.

- Escrever $\lim\left(-\frac{1}{c_n}\right) = \lim\left(-\frac{n}{4}\right) = -\infty$.
- Escrever a definição de sucessão propriamente divergente para $+\infty$ em módulo.
- Usando a definição anterior, provar que $|u_n| \to +\infty$.

c.

- Referir que $A' \cap B' = \emptyset$ obriga a que os conjuntos A e B não tenham pontos de acumulação em comum.
- Explicar que A tem um único ponto de acumulação, 2, e que B ou não tem nenhum ($se\ k = 0$) ou tem um ponto de acumulação (2, caso $k \neq 0$).
- Concluir que $k = 0$.

d.

- Referir que $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^n$ é uma série geométrica em que a razão da progressão geométrica que lhe está associada é $\frac{x^2-2}{2}$.

- Referir que para a série convergir, $-1 < \left|\frac{x^2-2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in]-2,2[\setminus\{0\}$.
- Escrever que a soma da série é dada por $S = \frac{u_1}{1-r} = \frac{\frac{x^2-2}{2}}{1-\frac{x^2-2}{2}} = \frac{x^2-2}{-x^2+4}$.

4.

a.

- Dizer que o conjunto C é formado por todos os pontos do plano XOY que distam de $(a, b, 0)$ no máximo 1 unidade. Trata-se de um círculo (incluíndo circunferência) com centro em $(a, b, 0)$ e raio 1.
- Dizer que para C ser vizinhança de $(a, b, 0)$ em $\mathbb{R}^3$ seria preciso que C contivesse uma bola de centro em $(a, b, 0)$. Como bolas em $\mathbb{R}^3$ são esferas, não é possível que o conjunto C (pertencente a um plano) contenha uma esfera de centro em $(a, b, 0)$ pelo que a proposição é falsa.

b.

- Dizer que (v_n) é uma sucessão monótona pois é estritamente crescente ($v_{n+1} - v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$).
- Dizer que (v_n) é uma sucessão limitada pois $v_1 \leq v_n \leq k$, $k \in \mathbb{R}$.
- Dizer que (v_n) ser monótona e limitada é condição suficiente para ser convergente.
- Dizer que se (v_n) converge, então é possível concluir, pelo critério geral de convergência, que $\lim u_n = 0$.
- Dizer que se (v_n) converge, qualquer subsucessão de (v_n) irá convergir para o mesmo número real. Ou seja, $L = \lim v_n = \lim v_{2n+3} \Leftrightarrow \lim(v_{2n+3} - v_n) = 0$.
- Concluir que a proposição é verdadeira pois $\lim u_n = \lim(v_{2n+3} - v_n) = 0$.