Cálculo I 2022 – 2023 S1

Arber Selimi **Helena Almeida** **Marco Mendes**
Áurea Quintino **João Farinha** **Sofia Rézio**
Diogo Pereira **Jessica Lomba**

NOVA
NOVA SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS

Exame de Recurso

- **Data:** 18 de Janeiro de 2023
- **Duração:** 2 horas e 30 minutos

  Instruções: 1: O exame é constituído por **quatro perguntas**. **2:** Neste enunciado, escreva o seu número e **absolutamente mais nada**, e **entregue-o no fim**. **3:** Responda ao teste no caderno de resposta, utilizando a **frente** e o **verso** de cada folha, **indicando** a pergunta a que está a responder, **nunca** respondendo a **mais do que uma pergunta na mesma folha**, e **não desagrafando** nenhuma folha. **4:** Se quiser utilizar alguma folha do caderno de resposta como espaço para **rascunhos**, indique-o no **espaço dedicado ao número da pergunta**. **5: Apresente todos os cálculos que efetuar e justifique convenientemente** todas as suas respostas. **6: Não** é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem máquinas de calcular. **7:** Não é permitido abandonar a sala antes de decorrida a primeira hora de prova. **8:** Os **telefones** deverão permanecer **desligados** ao longo de toda a prova. **9: Quando o tempo acabar** e lhe for solicitado, **fotografe as suas respostas e entregue o caderno de resposta**. Bom trabalho!

Nº:

1. **(5 val)** Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = 1 + \frac{k}{n}$, com $k \in \mathbb{R}$.

~~a.~~ **(0.5 val)** Indique $\lim(u_n)$ e comprove o resultado recorrendo à definição de limite de uma sucessão convergente.

Seja C o conjunto de todos os valores de k que garantem que os termos de (u_n) são números irracionais e que $\frac{1}{2}$ não é minorante do conjunto dos termos de (u_n).

b. **(1.25 val)** Mostre que $C = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\setminus \mathbb{Q}$, e explique se C é vizinhança de algum dos seus pontos.

c. **(1.25 val)** Encontre a fronteira e o conjunto dos pontos isolados de $C \cup \mathbb{Z}$, e encontre o interior e o derivado de $C \times \mathbb{Z}$.

Considere, a partir de agora, que $k = -1$.

d. **(1 val)** Seja $m \in \mathbb{R}$ o terceiro termo da sucessão das somas parciais de (u_n). Classifique a série numérica $\sum_{n \geq 1} m^{-n}$ quanto à sua convergência e, em caso de convergência, calcule a sua soma.

~~e.~~ **(1 val)** Sejam (w_n) e (z_n) duas sucessões tais que:

- $w_n \to e^{-6}$
- $\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \geq p\,, (u_n)^{2n} - z_n \leq 0 \wedge z_n - \sqrt[3]{w_n} \leq 0$

Calcule, caso exista, $\lim(z_n)$.

2. **(6.5 val)** Considere as funções $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g: D_g \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h: D_h \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

- $f(x,y) = \left(\ln(y+x^2), \frac{\pi}{xe^y} + \sqrt{xy}\right)$
- $g(a,b,c) = \left(\sqrt{b} + \ln(c+1), \frac{1}{|a|}\right)$
- $h(u,v) = \frac{1}{u^2+1} + \sqrt{\ln(v)}$
- $i(p,q) = (p^3, p - q^3)$.

a. **(1.25 val)** Defina analiticamente e represente geometricamente D_f.

b. **(0.5 val)** D_f é aberto? É fechado?

c. Seja f_1 a primeira função componente de f.

i. **(0.75 val)** Defina analiticamente e represente geometricamente a curva de nível 1 de f_1.

ii. **(1 val)** Determine o conjunto dos pontos $(0,b)$, com $b \in \mathbb{R}$, para os quais a função f_1 é prolongável por continuidade a $(0,b)$.

d. **(1 val)** Descreva o domínio e o contradomínio de g, sob a forma de produtos cartesianos de conjuntos.

e. **(1 val)** Caracterize, caso estejam definidas, as funções $(g \circ h)$ e $(h \circ g)$.

f. **(1 val)** Mostre que i é invertível e caracterize a sua inversa.

3. **(5.5 val)** Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad y < x \\ x^2 - y & \text{se} \quad y \geq x \end{cases}$$

a. **(1 val)** Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

b. **(1 val)** Determine o domínio de continuidade de f.

c. **(1 val)** Mostre que $\nabla_f(0,0) = (0,-1)$.

d. **(1.5 val)** Estude f quanto à diferenciabilidade em $(0,0)$.

e. **(1 val)** Determine $b \in \mathbb{R}$ tal que $f'_{(-2,b)}(-1,0) = 5$.

4. **(3 val)** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

a. **(1 val)** Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ é real, então $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{x} = 0$.

b. **(1 val)** Se $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma distância em $\mathbb{R}$, então não há nenhuma curva de nível $k \in \mathbb{R}_0^+$ de f com cardinal 1.

c. **(1 val)** Se $A = \{-1,3,5\}$, então

$(\exists x \in A : \forall y \in A, xy < 0) \Rightarrow (\forall x \in A, \exists y \in A : xy < 0)$.

Cálculo I 2022 – 2023 S1

Arber Selimi **Helena Almeida** **Marco Mendes**
Áurea Quintino **João Farinha** **Sofia Rézio**
Diogo Pereira **Jessica Lomba**

Tópicos de Resolução

1.

a.

- Escrever $\lim(u_n) = 1$.
- Escrever a definição de limite de uma sucessão convergente, aplicada à sucessão dada.
- Obter uma relação entre n e δ, válida para todos os valores positivos de δ, por exemplo $n > \frac{|k|}{\delta}$.
- Indicar a ordem natural a partir da qual todos os termos de (u_n) distam de 1 menos que δ.

b.

- Referir que para que os termos de (u_n) sejam números irracionais é necessário que $\frac{k}{n}$ seja um número irracional.
- Referir que $\frac{k}{n}$ é um número irracional se k for um número irracional.
- Referir que para $\frac{1}{2}$ não ser minorante do conjunto dos termos de (u_n) é preciso garantir que (u_n) é crescente (tende para 1 por valores inferiores a 1) e que $u_1 < \frac{1}{2}$.
- Resolver $u_1 < \frac{1}{2}$ e concluir que $k < -\frac{1}{2}$.
- Concluir que $C = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\backslash\mathbb{Q}$.
- Concluir que C não é vizinhança de nenhum dos seus pontos pois C não contem nenhuma bola aberta inteiramente contida em C (existem sempre números racionais independentemente do raio e centro da bola).

c.

- Escrever $fr(C \cup \mathbb{Z}) = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \mathbb{Z}$ e que o conjunto dos pontos isolados de $C \cup \mathbb{Z}$ é dado por $\mathbb{Z}_0^+$.
- Escrever $int(C \times \mathbb{Z}) = \emptyset$ e que $(C \times \mathbb{Z})' = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \times \mathbb{Z}$.

d.

- Escrever $S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{7}{6}$
- Escrever $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{7}{6}\right)^{-n} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{6}{7}\right)^{n}$
- Reconhecer que se trata de uma série geométrica de razão $\frac{6}{7}$.
- Concluir que a série é convergente pois $\left|\frac{6}{7}\right| < 1$.
- Escrever $S = \frac{\frac{6}{7}}{1-\frac{6}{7}} = 6$.

e.

- Escrever que $\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \geq p\, , (u_n)^{2n} \leq z_n \leq \sqrt[3]{w_n}$.
- Referir que o teorema das sucessões enquadradas permite concluir que:
  $\lim\,(u_n)^{2n} \leq \lim\; z_n \leq \lim\; \sqrt[3]{w_n}$
- Referir que $\lim \sqrt[3]{w_n} = \sqrt[3]{\lim\; w_n} = \sqrt[3]{e^{-6}} = e^{-2}$.
- Referir que $\lim(u_n)^{2n} = \left[\lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = (e^{-1})^2 = e^{-2}$.
- Concluir que $\lim z_n = e^{-2}$.

2.

a.

- Observar que

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 > 0 \wedge xe^y \neq 0 \wedge xy \geq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y \geq 0) \vee (x < 0 \wedge -x^2 < y \leq 0)\}. \end{aligned}$$

- Representar D_f graficamente.

b.

- Mostrar que $\operatorname{int}(D_f) \neq D_f$, concluindo, assim, que D_f não é aberto.
- Mostrar que $\overline{D_f} \neq D_f$, concluindo, assim, que D_f não é fechado.

c.

i.

- Referir que

$$C_{f_1}^1 = \left\{(x,y) \in D_f : f_1(x,y) = 1\right\} = \left\{(x,y) \in D_f : y = -x^2 + e\right\}.$$

- Representar $C_{f_1}^1$ graficamente.

ii.

- Observar que, dado $b \in \mathbb{R}^-$, $(0,b)$ é um ponto isolado de $D_{f_1} \cup \{(0,b)\}$, pelo que f_1 é (trivialmente) prolongável por continuidade a $(0,b)$.
- Referir que, dado $b \in \mathbb{R}_0^+$, $(0,b)$ é ponto de acumulação de D_{f_1}, pelo que f_1 será prolongável por continuidade a $(0,b)$ se e só se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f_1(x,y)$ existir e for finito.
- Verificar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} f_1(x,y) = \begin{cases} \ln(b), & \text{se } b > 0 \\ -\infty, & \text{se } b = 0 \end{cases}.$$

- Concluir que o conjunto pedido é $\left\{(0,b) : b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$.

d.

- $D_g = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_0^+ \times]-1, +\infty[$
- $CD_g = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

e.

- Constatar que as dimensões do conjunto de chegada de h e do domínio de g não são compatíveis, pelo que a composição $g \circ h$ não está definida.
- Constatar que as dimensões do conjunto de chegada de g e do domínio de h são compatíveis, pelo que a composição $h \circ g$ poderá estar definida.
- Descrever o domínio de $h \circ g$:
  - $D_{h\circ g} = \{(a, b, c) \in D_g : g(a, b, c) \in D_h\}$
  - $D_h = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0 \wedge \ln(v) \geq 0\} = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$
  - $g(a, b, c) \in D_h \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} \in [1, +\infty[\Leftrightarrow a \in [-1,1] \setminus \{0\}$
  - Concluir que $D_{h\circ g} = ([-1,1] \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_0^+ \times]-1, +\infty[$.
- Obter a expressão analítica da função composta:

$$(h \circ g)(a, b, c) = h\big(g(a, b, c)\big) = \frac{1}{\left(\sqrt{b} + \ln(c+1)\right)^2 + 1} + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{|a|}\right)}.$$

- Caracterizar a função composta:

$$h \circ g : ([-1,1] \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_0^+ \times]-1, +\infty[\to \mathbb{R}^2,$$

$$(a, b, c) \longmapsto \frac{1}{\left(\sqrt{b} + \ln(c+1)\right)^2 + 1} + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{|a|}\right)}.$$

f.

- Mostrar que, dado $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$i(p, q) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} p^3 = \alpha \\ p - q^3 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \sqrt[3]{\alpha} \\ q^3 = \sqrt[3]{\alpha} - \beta \end{cases} \Leftrightarrow (p, q) = \left(\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{\alpha} - \beta}\right).$$

- Concluir a sobrejetividade de i, em virtude da existência de solução de $i(p, q) = (\alpha, \beta)$ para qualquer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- Concluir a injetividade de i, em virtude da unicidade de solução de $i(p, q) = (\alpha, \beta)$, dado $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- Concluir que i é bijetiva e, assim, invertível.

- Caracterizar a função inversa de i:

$$i^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , (\alpha, \beta) \mapsto \left(\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{\alpha} - \beta}\right).$$

3.

a.

- Referir que f é contínua em $(0,0)$ se e só se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.
- Calcular $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\geq x}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\geq x}} x^2 - y = 0$.
- Mostrar, recorrendo à definição de limite de uma função, que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y<x}} f(x,y) = 0$ (por exemplo, obtendo a relação $\varepsilon \leq \delta$).
- Concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e, assim, que f é contínua em $(0,0)$.

b.

- Justificar a continuidade de f em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ e em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$.
- Referir a continuidade de f em $(0,0)$, de acordo com a alínea a).
- Fixar arbitrariamente $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e referir que f é contínua em (a,a) se e só se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = f(a,a) = 0$.
  - Mostrar que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ y\geq x}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ y\geq x}} x^2 - y = a\,(a-1)$.
  - Mostrar que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ y<x}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ y<x}} \frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} = \frac{0}{2a^2} = 0$, dado que $a \neq 0$.
  - Concluir que f só é contínua caso $a = 1$, portanto em $(1,1)$.
- Concluir que o domínio de continuidade de f é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,a) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0 \land a \neq 1\}$.

c.

- Referir que $\nabla_f(0,0) = \left(f'_x(0,0), f'_y(0,0)\right)$.
- Mostrar que $f'_x(0^-,0) = 0$ (podendo usar as regras de derivação).
- Calcular $f'_x(0^+,0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = 0$.
- Concluir que que $f'_x(0,0) = 0$.
- Calcular $f'_y(0,0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\frac{-h^3}{h^2}-0}{h} = -1$.
- Mostrar que $f'_y(0,0^+) = -1$ (podendo usar as regras de derivação).
- Concluir que $\nabla_f(0,0) = (0,-1)$.

d.

- Referir que f é diferenciável em $(0,0)$ se e só se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$, em que $R(x,y)$ é o erro de aproximação.
- Verificar que o erro de aproximação é dado por $R(x,y) = f(x,y) + y$:
  $f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + R(x,y) = 0 + 0 - y + R(x,y)$.
- Constatar que há duas expressões possíveis para $f(x,y)$, e portanto, também para $R(x,y)$.
- Mostrar que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y<x}} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y<x}} \frac{yx^2-y^3+x^2y+y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y<x}} \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ não é zero: por exemplo, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x^2(2x)}{(x^2+(2x)^2)\sqrt{x^2+(2x)^2}} = -\frac{4}{5\sqrt{5}}$.
- Concluir que f não é diferenciável em $(0,0)$.

e.

- Referir que, dado que f é diferenciável em $(-1,0)$, $f'_{(-2,b)}(-1,0) = \nabla f(-1,0) \cdot (-2,b)$.
- Calcular $f'_x(-1,0) = -2$ (usando as regras de derivação).
- Calcular $f'_y(-1,0) = -1$ (usando as regras de derivação).
- Concluir que $f'_{(-2,b)}(-1,0) = (-2,-1) \cdot (-2,b) = 4 - b = 5$, pelo que $b = -1$.

4.

a.

- Observar que, de acordo com a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \left(f'(x).\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\right) = 0,$$

  tendo em conta que f é diferenciável, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ é real e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Concluir que a proposição é verdadeira.

b.

- Referir que se f é uma distância em $\mathbb{R}$ então, para $x \neq y$, tem-se $f(x,y) = f(y,x) > 0$, pelo que qualquer curva de nível k, com $k > 0$, de f conterá pelo menos um ponto (cardinal superior a 1).
- Referir que se para $x = y$, tem-se $f(x,y) = 0$, logo a curva de nível 0 de f conterá todos os pontos da forma (x,x), com $x \in \mathbb{R}$. Assim, o cardinal da curva de nível 0 de f é superior a 1.
- Concluir que a proposição é verdadeira.

c.

- Mostrar que o antecedente da implicação é falso: de facto, para todo o elemento $x \in A$, existe um elemento $y \in A$ tal que $xy \geq 0$. Se $x = 3$, então por exemplo $y = 5$; se $x = 5$, então por exemplo $y = 3$. Se $x = -1$, então $y = -1$.
- Concluir que, dado que o antecendente da implicação é sempre falso, então independentemente do valor lógico do consequente, a implicação será verdadeira.