Cálculo I 2022 – 2023 S1

Arber Selimi **Helena Almeida** **Marco Mendes**
Áurea Quintino **João Farinha** **Sofia Rézio**
Diogo Pereira **Jessica Lomba**

Exame Normal

- **Data:** 19 de Dezembro de 2022
- **Duração:** 2 horas e 30 minutos
- **Instruções: 1:** O exame é constituído por **quatro perguntas**. **2:** Neste enunciado, escreva o seu número e **absolutamente mais nada**, e **entregue-o no fim**. **3:** Responda ao teste no caderno de resposta, utilizando a **frente** e o **verso** de cada folha, **indicando** a pergunta a que está a responder, **nunca** respondendo a **mais do que uma pergunta na mesma folha**, e **não desagrafando** nenhuma folha. **4:** Se quiser utilizar alguma folha do caderno de resposta como espaço para **rascunhos**, indique-o no **espaço dedicado ao número da pergunta**. **5: Apresente todos os cálculos que efetuar e justifique convenientemente** todas as suas respostas. **6: Não** é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem máquinas de calcular. **7:** Não é permitido abandonar a sala antes de decorrida a primeira hora de prova. **8:** Os **telefones** deverão permanecer **desligados** ao longo de toda a prova. **9: Quando o tempo acabar** e lhe for solicitado, **fotografe as suas respostas e entregue o caderno de resposta**.

  Bom trabalho!

Nº:

1. **(5 val)** Considere a sucessão (u_n), definida por $u_n = \begin{cases} n-2 & ,n<4 \\ a^{-n} & ,n \geq 4 \end{cases}$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a. **(1 val)** Mostre que o conjunto A, formado por todos os valores de a para os quais a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge, é dado por $A = [-1,1] \setminus \{0\}$.

b. **(1 val)** Mostre que o conjunto B, formado por todos os valores de a que tornam (u_n) crescente, é dado por $B =]0,1]$.

~~c.~~ **(1 val)** Considere o conjunto $C = A \times B$. Descreva o conjunto dos pontos $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ para os quais $C \cup \{(s,t)\}$ é conexo por arcos.

Considere agora $a = 2$.

d. **(1 val)** Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

~~e.~~ **(1 val)** Encontre o valor de $\lim \left(1 - \frac{u_n}{2}\right)^{2^{n+1}}$.

2. **(6 val)** Considere a função $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x,y) = (\, f_1(x,y)\, ,\, f_2(x,y)\,) = \left(\frac{x^2|y|}{x^2+|y|}, \sqrt{\frac{\ln(y+1)}{x}} \right).$$

a. **(1 val)** Defina analiticamente e represente graficamente o domínio de f, D.

b. **(2 val)** Calcule $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f_1(x,y)$ e $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f_2(x,y)$, e mostre que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)$.

c. **(1 val)** A função f é prolongável por continuidade a $(0,0)$? E a $(0, e-1)$?

d. **(1 val)** Seja $g: \mathbb{R}^2 \to D$ uma função tal que $\lim\limits_{(a,b)\to(0,0)} g(a,b) = (1, e-1)$ e $(f \circ g)(0,0) = (1, e-1)$. A função $(f \circ g)$ é contínua em $(0,0)$?

e. **(1 val)** Mostre que a equação $f_1(x, x+1) = f_2(x, e-1)$ tem solução em $]1,2[$.

3. **(6 val)** Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad y \neq x \\ 0 & \text{se} \quad y = x \end{cases}$$

a. **(1.25 val)** Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

b. **(1.25 val)** Determine o domínio de continuidade de f.

c. **(1 val)** Mostre que $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

d. **(1.5 val)** Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

e. **(1 val)** Mostre que a derivada direcional de f em $(0,0)$ é nula segundo qualquer direção.

4. **(3 val)** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

a. **(1 val)** Se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e (a,b) é um ponto em $\mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(a,b) = (3,4)$, então $f'_{(-4,3)}(a,b) = 0$ e $f'_{(3,4)}(a,b) \geq f'_{(4,3)}(a,b)$.

b. **(1 val)** Se $f: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então a função $(g \circ f): [-1,1] \to \mathbb{R}$ está definida, mas não é sobrejetiva.

c. **(1 val)** Se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $(0,0)$ e $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função cujo gráfico é o plano tangente ao gráfico de f em $(0,0)$, então a função $z: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $z(y) = f(0,y) - P(0,y)$, pode não ser par.

Cálculo I 2022 – 2023 S1

Arber Selimi **Helena Almeida** **Marco Mendes**
Áurea Quintino **João Farinha** **Sofia Rézio**
Diogo Pereira **Jessica Lomba**

Tópicos de Resolução

1.

a.

- Escrever $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$.
- Referir que para $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ divergir é necessário que a série $\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ seja divergente.
- Referir que $\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{a}$.
- Referir que a série $\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ será divergente se $\left|\frac{1}{a}\right| \geq 1$.
- Resolver $\left|\frac{1}{a}\right| \geq 1 \Leftrightarrow |a| \leq 1 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow a \in [-1,1]\backslash\{0\}$ e concluir que $A = [-1,1]\backslash\{0\}$.

b.

- Escrever $u_1 = -1, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = \frac{1}{a^4}, a \neq 0$.
- Referir que u_n ser crescente obriga ao cumprimento das seguintes duas condições:
  - $\frac{1}{a^4} \geq 1 \Leftrightarrow a^4 - 1 \leq 0 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow (a^2-1)(a^2+1) \leq 0 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow a \in [-1,1]\backslash\{0\}$
  - $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{a}\right)^n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{a} - 1\right) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Concluir que se $-1 \leq a < 0$, é falso que $\frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{a} - 1\right) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e que se $0 < a \leq 1$, é verdadeiro que $\frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{a} - 1\right) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, logo $0 < a \leq 1$.
- Concluir que $B =]0,1]$.

c.

- Representar geometricamente $C = ([-1,1]\backslash\{0\}) \times]0,1]$.
- Explicar que C é conexo por arcos se for possível unir dois quaisquer elementos de C, por intermédio de uma linha (recta ou curva), sem que a linha passe por pontos do complementar de C.
- Concluir que o conjunto pedido é dado por $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s = 0 \wedge 0 \leq t \leq 1\}$.

d.

- Escrever $S = u_1 + u_2 + u_3 + \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Referir que $\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma série geométrica convergente pois $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$, logo:

$$S = -1 + 0 + 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

e.

- Escrever $\lim\left(1-\frac{u_n}{2}\right)^{2^{n+1}} = \lim\left(1-\frac{\frac{1}{2^n}}{2}\right)^{2^{n+1}} = \lim\left(1+\frac{-1}{2^{n+1}}\right)^{2^{n+1}}$

- Referir que $2^{n+1} \to +\infty$ e concluir, com recurso ao limite de Neper, que $\lim\left(1+\frac{-1}{2^{n+1}}\right)^{2^{n+1}} = \frac{1}{e}$.

2.

a.

- Escrever que $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+|y| \neq 0 \wedge (x\ln(y+1) \wedge x \neq 0 \wedge (y+1) > 0)\}$

- Concluir que $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: (x>0 \wedge y \geq 0) \vee (x<0 \wedge -1<y\leq 0)\}$, ou concluir que $D_f = (\mathbb{R}^- \times]-1{,}0]) \cup (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+)$

b.

- Escrever $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f_1(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2|y|}{x^2+|y|} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2|x|}{x^2+|x|}$

- Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2|x|}{x^2+|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2|x|}{x^2+|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x^3}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x-1} = 0$

- Concluir que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f_1(x,y) = 0$

- Calcular $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f_2(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \sqrt{\frac{\ln(y+1)}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{\ln(x+1)}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}} = 1$

- Calcular, por exemplo, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \sqrt{\frac{\ln(y+1)}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(mx+1)}{mx} \times m} = \sqrt{\mathrm{m}}$, que depende de m.

- Concluir que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)$.

c.

- Concluir que dado que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)$, f não é prolongável por continuidade a $(0,0)$.

- Calcular $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,\mathrm{e}-1)\\ x>0}} \frac{x^2|y|}{x^2+|y|} = \frac{0}{e-1} = 0$ e $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,\mathrm{e}-1)\\ x>0}} \sqrt{\frac{\ln(y+1)}{x}} = +\infty$

- Concluir que dado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\mathrm{e}-1)} f_2(x,y)$ não é finito, f não é prolongável por continuidade a $(0, e-1)$.

d.

- Usando o teorema relativo ao limite da função composta, se $\lim_{(a,b)\to(0,0)} g(a,b) = (1, e-1)$ e $\lim_{(x,y)\to(1,\mathrm{e}-1)} f(x,y) = \left(\frac{e-1}{e}, 1\right)$, então $\lim_{(a,b)\to(0,0)} (f \circ g)(a,b) = \left(\frac{e-1}{e}, 1\right)$.

- Concluir que dado que $\lim_{(a,b)\to(0,0)} (f \circ g)(a,b) = \left(\frac{e-1}{e}, 1\right) \neq (1, \mathrm{e}-1) = (f \circ g)(0,0)$, então a função $(f \circ g)$ não é contínua em $(0,0)$.

e.

- Estabelecer a equação $\frac{x^2|x+1|}{x^2+|x+1|} = \sqrt{\frac{1}{x}}$, válida para $x \neq 0$.
- Considerar uma função h de expressão $h(x) = \frac{x^2|x+1|}{x^2+|x+1|} - \sqrt{\frac{1}{x}}$, e justificar devidamente que h é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo também contínua em $[1,2]$.
- Calcular $h(1) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} < 0$ e $h(2) = \frac{6}{5} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}-5}{5\sqrt{2}} > 0$.
- Concluir que dado que h é contínua em $[1,2]$ e $h(1) \times h(2) < 0$, então pelo corolário do Teorema de Bolzano $\exists c \in]1,2[: h(c) = 0$, o que por sua vez significa que para esse valor de c, $\frac{c^2|c+1|}{c^2+|c+1|} = \sqrt{\frac{1}{c}}$. Ou seja, a equação tem solução em $]1,2[$.

3.

a.

- Referir que f é contínua em $(0,0)$ se e só se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.
- Verificar que $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = 0$.
- Mostrar, recorrendo à definição de limite de uma função, que $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x}} f(x,y) = 0$ (por exemplo, obtendo a relação $\varepsilon \leq \sqrt{\delta}$).
- Concluir que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e, assim, que f é contínua em $(0,0)$.

b.

- Justificar a continuidade de f em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$.
- Referir a continuidade de f em $(0,0)$, de acordo com a alínea a).
- Fixar arbitrariamente $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e referir que f é contínua em (a,a) se e só se $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = f(a,a) = 0$.

- Mostrar que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ y\neq x}} f(x,y) = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \neq 0$.
- Concluir que f não é contínua em (a,a).
- Concluir que o domínio de continuidade de f é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

c.

- Referir que $\nabla_f(0,0) = \left(f'_x(0,0), f'_y(0,0)\right)$.
- Mostrar, recorrendo à definição de derivada parcial, que $f'_x(0,0) = 0$.
- Mostrar, recorrendo à definição de derivada parcial, que $f'_y(0,0) = 0$.
- Concluir que $\nabla_f(0,0) = (0,0)$.

d.

- Referir que f é diferenciável em $(0,0)$ se e só se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$, para $R(x,y)$ o erro de aproximação.
- Verificar que o erro de aproximação é dado por $R(x,y) = f(x,y)$:

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + R(x,y) = R(x,y).$$

- Concluir que f é diferenciável em $(0,0)$ se e só se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|x|y}{x^2+y^2} = 0$.
- Mostrar, recorrendo à definição de limite de uma função, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|x|y}{x^2+y^2} = 0$ (por exemplo, obtendo a relação $\varepsilon \leq \delta$).
- Concluir que f é diferenciável em $(0,0)$.

e.

- Referir que, sendo f diferenciável em $(0,0)$, $f'_{(u,v)}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (u,v), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.
- Concluir, pelo facto de $\nabla f(0,0) = (0,0)$, que $f'_{(u,v)}(0,0) = (0,0) \cdot (u,v) = 0, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, e, em particular, que a derivada direcional de f em $(0,0)$ é nula segundo qualquer direção.

4.

a.

- Dizer que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, e por isso em (a,b).
- Dizer que f diferenciável em (a,b) implica que $f'_{(u,v)}(a,b) = \nabla f(a,b).(u,v) = 3u + 4v$.
- Referir que $f'_{(-4,3)}(a,b) = 3 \times (-4) + 4 \times 3 = 0$.
- Referir que $f'_{(3,4)}(a,b) = 3 \times 3 + 4 \times 4 = 25$ e que $f'_{(4,3)}(a,b) = 3 \times 4 + 4 \times 3 = 24$. Logo,

$f'_{(3,4)}(a,b) \geq f'_{(4,3)}(a,b)$.

- Concluir que a proposição é verdadeira.

b.

- Referir que $g \circ f$ está definida pois $CD_f \subset D_g$, sendo $D_{g \circ f} = D_f = [-1,1]$.
- Referir que $g \circ f$ é uma função contínua em $[-1,1]$ pois resulta da composição de funções contínuas.
- Referir que $[-1,1]$ é um conjunto fechado e limitado e, por isso, compacto.
- Concluir que, se $g \circ f$ é contínua num conjunto compacto, então $CD_{(g \circ f)}$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$.
- Concluir que $CD_{(g \circ f)} \neq \mathbb{R}^2$ porque $\mathbb{R}^2$ não é um conjunto compacto (não é limitado).
- Concluir que $g \circ f$ não pode ser sobrejectiva pois $CD_{(g \circ f)} \neq CC_{(g \circ f)}$.

c.

- Referir que z é a função que traduz a diferença entre a verdadeira imagem do ponto $(0, y)$ e a estimativa dessa imagem dada pela equação do plano tangente ao gráfico de f em $(0,0)$, para cada valor de y.
- Referir que z não tem que ser par, pois podemos não ter $z(y) = z(-y)$. De facto, $z(-0.1)$ pode ser positivo (implicando que o plano tangente subestime f em $(0, -0.1)$) e $z(0.1)$ pode ser negativo (implicando que o plano tangente sobrestime f em $(0, 0.1)$). Ou seja, valores simétricos de y podem levar a diferentes valores de z, pelo que z não tem que ser par.
- Concluir que a proposição é verdadeira.